

HASIL-KALI TITIK ATAU SKALAR dari dua buah vektor **A** dan **B** yang dinyatakan oleh $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ (baca **A** titik **B**) didefinisikan sebagai hasil-kali antara besarnya vektor-vektor **A** dan **B** dan cosinus sudut θ antara keduanya. Dalam simbol,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

Perhatikan bahwa $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ adalah sebuah skalar dan bukan vektor.

Hukum-hukum berikut berlaku :

1. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$

Hukum Komutatif untuk Hasil-kali Titik

2. $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$

Hukum Distributif

3. $m(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (m\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot (m\mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})m$, di mana m adalah sebuah skalar.

4. $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1, \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$

5. If $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ dan $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$, maka

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{B} = B^2 = B_1^2 + B_2^2 + B_3^2$$

6. Jika $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$ dan **A** beserta **B** bukanlah vektor-vektor nol, maka **A** dan **B** tegaklurus.

HASIL-KALI SILANG ATAU VEKTOR dari **A** dan **B** adalah sebuah vektor $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ (baca **A** silang **B**). Besarnya $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ didefinisikan sebagai hasil-kali antara besarnya **A** dan **B** dan sinus sudut θ antara keduanya. Arah vektor $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ tegaklurus pada bidang yang memuat **A** dan **B** sedemikian rupa sehingga **A**, **B** dan **C** membentuk sebuah sistem tangan-kanan. Dalam simbol,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = AB \sin \theta \mathbf{u}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

di mana **u** adalah vektor satuan yang menunjukkan arah dari $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$. Jika $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, atau **A** sejajar dengan **B**, maka $\sin \theta = 0$ dan kita mendefinisikan $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$.

Hukum-hukum berikut juga berlaku :

1. $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$

(Hukum Komutatif tak berlaku untuk Hasil-kali Silang).

2. $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$

Hukum distributif

3. $m(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (m\mathbf{A}) \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times (m\mathbf{B}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B})m$, di mana m adalah sebuah skalar

4. $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$

5. Jika $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ dan $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$, maka

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

6. Besarnya $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ sama dengan luas jajaran genjang dengan sisi-sisi \mathbf{A} dan \mathbf{B} .
7. Jika $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ dan \mathbf{A} beserta \mathbf{B} bukanlah vektor-vektor nol, maka \mathbf{A} dan \mathbf{B} sejajar.

HASIL-KALI TRIPEL. Hasil-kali titik dan silang dari tiga buah vektor \mathbf{A} , \mathbf{B} , dan \mathbf{C} dapat menghasilkan hasil-kali yang mempunyai arti dalam bentuk-bentuk berikut $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$, $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ dan $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$. Hukum-hukum berikut berlaku:

1. $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{C} \neq \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$
2. $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) =$ volume sebuah jajaran-genjang ruang yang memiliki sisi-sisi \mathbf{A} , \mathbf{B} dan \mathbf{C} atau negatif dari volume ini, sesuai dengan apakah \mathbf{A} , \mathbf{B} dan \mathbf{C} membentuk sebuah sistem tangan-kanan ataukah tidak. Jika $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$ dan $\mathbf{C} = C_1\mathbf{i} + C_2\mathbf{j} + C_3\mathbf{k}$, maka

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

3. $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \neq (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$ (Hukum Asosiatif tak berlaku untuk Hasil-kali Silang)
4. $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$
 $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\mathbf{A}$

Hasil-kali $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ seringkali disebut *hasil-kali triple skalar* atau *hasil-kali kotak* dan dapat dinyatakan dengan $[\mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{C}]$. Hasil-kali $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ disebut *hasil-kali triple vektor*.

Dalam $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ seringkali dihilangkan tanda-kurungnya dan dituliskan saja sebagai $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}$ (lihat Soal-soal 41). Tetapi tanda-kurungnya harus dipergunakan dalam $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ (lihat Soal-soal 29 dan 47).

HIMPUNAN VEKTOR-VEKTOR RESIPROKAL (RECIPROCAL). Himpunan vektor-vektor \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} dan \mathbf{a}' , \mathbf{b}' , \mathbf{c}' disebut *himpunan atau sistem vektor-vektor resiprokal* jika

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}' = \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}' = \mathbf{c} \cdot \mathbf{c}' = 1$$

$$\mathbf{a}' \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}' \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b}' \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b}' \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c}' \cdot \mathbf{a} = \mathbf{c}' \cdot \mathbf{b} = 0$$

Himpunan-himpunan \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} dan \mathbf{a}' , \mathbf{b}' , \mathbf{c}' adalah himpunan vektor-vektor resiprokal jika dan hanya jika

$$\mathbf{a}' = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}, \quad \mathbf{b}' = \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}, \quad \mathbf{c}' = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}$$

di mana $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} \neq 0$. Lihat Soal-soal 53 dan 54.

Soal-soal yang Dipecahkan

HASIL KALI TITIK ATAU SKALAR

1. Buktikan $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$.

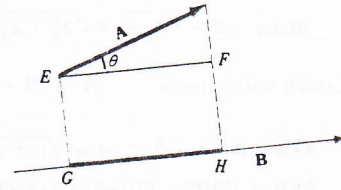
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta = BA \cos \theta = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

Jadi hukum komutatif berlaku untuk hasil kali titik.

2. Buktikan bahwa proyeksi A pada B sama-dengan $A \cdot b$, dimana b adalah vektor satuan dalam arah B

Melalui titik-titik pangkal dan terminal dari A buatlah bidang-bidang yang melewatinya dan yang berturut-turut tegak-lurus B di G dan H seperti diperlihatkan dalam gambar di samping, maka

$$\text{Proyeksi } A \text{ pada } B = \overline{GH} = \overline{EF} = A \cos \theta = A \cdot b$$



3. Buktikan $A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$.

Misalkan a sebuah vektor satuan dalam arah A , maka Proyeksi $(B+C)$ pada $A = \text{proy. } B \text{ pada } A + \text{proy. } C \text{ pada } A$

$$(B+C) \cdot a = B \cdot a + C \cdot a$$

Perkalikan dengan A

$$(B+C) \cdot Aa = B \cdot Aa + C \cdot Aa$$

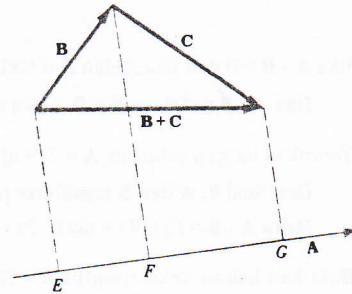
atau

$$(B+C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$$

Maka menurut hukum komutatif untuk hasil kali titik

$$A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$$

jadi hukum distributif disini berlaku.



4. Buktikan bahwa $(A+B) \cdot (C+D) = A \cdot C + A \cdot D + B \cdot C + B \cdot D$.

$$\text{Menurut Soal 3, } (A+B) \cdot (C+D) = A \cdot (C+D) + B \cdot (C+D) = A \cdot C + A \cdot D + B \cdot C + B \cdot D$$

Jadi hukum-hukum hasil-kali biasa dari aljabar berlaku untuk hasil-kali titik.

5. Hitunglah masing-masing yang berikut ini :

$$(a) i \cdot i = |i| |i| \cos 0^\circ = (1)(1)(1) = 1$$

$$(b) i \cdot k = |i| |k| \cos 90^\circ = (1)(1)(0) = 0$$

$$(c) k \cdot j = |k| |j| \cos 90^\circ = (1)(1)(0) = 0$$

$$(d) j \cdot (2i - 3j + k) = 2j \cdot i - 3j \cdot j + j \cdot k = 0 - 3 + 0 = -3$$

$$(e) (2i - j) \cdot (3i + k) = 2i \cdot (3i + k) - j \cdot (3i + k) = 6i \cdot i + 2i \cdot k - 3j \cdot i - j \cdot k = 6 + 0 - 0 - 0 = 6$$

6. Jika $A = A_1 i + A_2 j + A_3 k$ dan $B = B_1 i + B_2 j + B_3 k$, maka buktikan bahwa

$$A \cdot B = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3.$$

$$A \cdot B = (A_1 i + A_2 j + A_3 k) \cdot (B_1 i + B_2 j + B_3 k)$$

$$= A_1 i \cdot (B_1 i + B_2 j + B_3 k) + A_2 j \cdot (B_1 i + B_2 j + B_3 k) + A_3 k \cdot (B_1 i + B_2 j + B_3 k)$$

$$= A_1 B_1 i \cdot i + A_1 B_2 i \cdot j + A_1 B_3 i \cdot k + A_2 B_1 j \cdot i + A_2 B_2 j \cdot j + A_2 B_3 j \cdot k + A_3 B_1 k \cdot i + A_3 B_2 k \cdot j + A_3 B_3 k \cdot k$$

$$= A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3$$

karena $i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1$ dan semua hasil kali titik lainnya nol.

7. Jika $A = A_1 i + A_2 j + A_3 k$, perlihatkan bahwa $A = \sqrt{A \cdot A} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$.

$$A \cdot A = (A)(A) \cos 0^\circ = A^2. \text{ Maka } A = \sqrt{A \cdot A}.$$

$$\text{Juga, } A \cdot A = (A_1 i + A_2 j + A_3 k) \cdot (A_1 i + A_2 j + A_3 k)$$

$$= (A_1)(A_1) + (A_2)(A_2) + (A_3)(A_3) = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$$

menurut Soal 6, di mana diambilkan $\mathbf{B} = \mathbf{A}$.

Maka $A = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$ adalah besarnya \mathbf{A} . Seringkali $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$ dituliskan A^2 .

8. Carilah sudut antara $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ dan $\mathbf{B} = 6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta, \quad A = \sqrt{(2)^2 + (2)^2 + (-1)^2} = 3, \quad B = \sqrt{(6)^2 + (-3)^2 + (2)^2} = 7$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (2)(6) + (2)(-3) + (-1)(2) = 12 - 6 - 2 = 4$$

$$\text{Maka } \cos \theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{AB} = \frac{4}{(3)(7)} = \frac{4}{21} = 0,1905 \quad \text{dan } \theta = 79^\circ \text{ kurang lebih.}$$

9. Jika $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$ dan jika A dan B tidaklah nol, perhatikan bahwa \mathbf{A} tegaklurus \mathbf{B} .

Jika $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta = 0$, maka $\cos \theta = 0$ atau $\theta = 90^\circ$. Sebaliknya, jika $\theta = 90^\circ$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$.

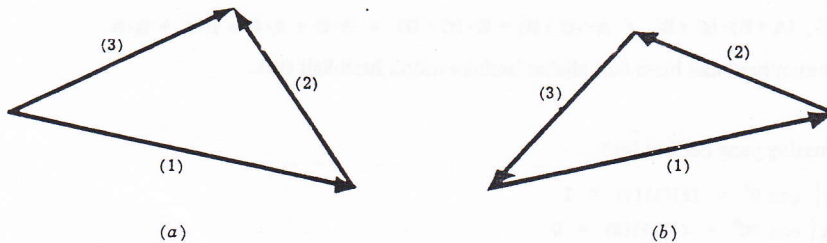
10. Tentukan harga a sehingga $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + a\mathbf{j} + \mathbf{k}$ dan $\mathbf{B} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ tegaklurus.

Dari Soal 9, \mathbf{A} dan \mathbf{B} tegaklurus jika $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$.

$$\text{Maka } \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (2)(4) + (a)(-2) + (1)(-2) = 8 - 2a - 2 = 0 \text{ untuk } a = 3.$$

11. Buktikan bahwa vektor-vektor $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{B} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $\mathbf{C} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ membentuk sebuah segitiga siku-siku.

Pertama haruslah kita memperlihatkan bahwa vektor-vektornya membentuk sebuah segitiga.



Dari gambar terlihat bahwa vektor-vektornya akan membentuk sebuah segitiga jika

- (a) salah satu vektornya, katakan (3) adalah resultan atau jumlah dari (1) dan (2),
 (b) jumlah atau resultan dari vektor-vektor (1) + (2) + (3) adalah nol, menurut (a) dua buah vektornya memiliki titik terminal yang sama atau (b) tak ada vektor-vektor yang memiliki titik terminal yang sama. Dengan mencoba-coba, kita dapatkan $\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$ sehingga dengan demikian vektor-vektornya memang membentuk sebuah segitiga.

Karena $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (3)(1) + (-2)(-3) + (1)(5) = 14$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = (3)(2) + (-2)(1) + (1)(-4) = 0$, dan $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = (1)(2) + (-3)(1) + (5)(-4) = -21$, maka dari sini diperoleh bahwa \mathbf{A} dan \mathbf{C} saling tegak lurus dan segitiganya adalah sebuah segitiga siku-siku.

12. Carilah sudut-sudut yang dibentuk vektor $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ dengan sumbu-sumbu koordinat.

Misalkan α , β , γ adalah berturut-turut sudut yang dibentuk \mathbf{A} dengan sumbu-sumbu x , y , z .

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{i} = (A)(1) \cos \alpha = \sqrt{(3)^2 + (-6)^2 + (2)^2} \cos \alpha = 7 \cos \alpha$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{i} = (3\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \cdot \mathbf{i} = 3\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} - 6\mathbf{j} \cdot \mathbf{i} + 2\mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 3$$

$$\text{Maka } \cos \alpha = 3/7 = 0,4286, \quad \text{dan } \alpha = 64,6^\circ \text{ kurang lebih.}$$

$$\text{Dengan cara yang sama, } \cos \beta = -6/7, \quad \beta = 149^\circ \quad \text{dan} \quad \cos \gamma = 2/7, \quad \gamma = 73,4^\circ.$$

Cosinus-cosinus dari α , β dan γ disebut *cosinus-cosinus arah* dari \mathbf{A} . (Lihat Soal 27, Bab. 1).

13. Carilah proyeksi vektor $A = i - 2j + k$ pada vektor $B = 4i - 4j + 7k$.

$$\text{Vektor satuan dalam arah } B \text{ adalah } b = \frac{B}{|B|} = \frac{4i - 4j + 7k}{\sqrt{(4)^2 + (-4)^2 + (7)^2}} = \frac{4}{9}i - \frac{4}{9}j + \frac{7}{9}k.$$

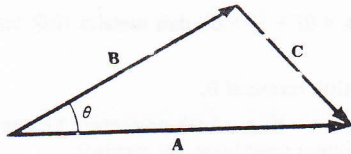
$$\begin{aligned} \text{Proyeksi } A \text{ pada } B &= A \cdot b = (i - 2j + k) \cdot \left(\frac{4}{9}i - \frac{4}{9}j + \frac{7}{9}k\right) \\ &= (1)\left(\frac{4}{9}\right) + (-2)\left(-\frac{4}{9}\right) + (1)\left(\frac{7}{9}\right) = \frac{19}{9}. \end{aligned}$$

14. Buktikan hukum cosinus untuk segitiga bidang.

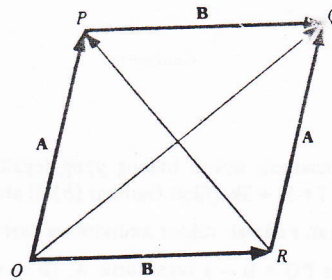
Dari Gamb. (a) di bawah, $B + C = A$ atau $C = A - B$.

$$\text{Maka } C \cdot C = (A - B) \cdot (A - B) = A \cdot A + B \cdot B - 2A \cdot B$$

$$\text{dan } C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta.$$



Gambar (a)



Gambar (b)

15. Buktikan bahwa diagonal-diagonal belah-ketupat saling tegak-lurus. Pergunakan Gamb. (b) diatas sebagai acuan.

$$OQ = OP + PQ = A + B$$

$$OR + RP = OP \text{ atau } B + RP = A \text{ dan } RP = A - B$$

$$\text{atau } OQ \cdot RP = (A+B) \cdot (A-B) = A^2 - B^2 = 0, \text{ karena } A=B.$$

Oleh karena itu OQ tegaklurus RP.

16. Tentukan sebuah vektor satuan yang tegak-lurus bidang $A = 2i - 6j - 3k$ dan $B = 4i + 3j - k$.

Misalkan vektor $C = c_1i + c_2j + c_3k$ tegaklurus bidang yang memuat A dan B. Maka C tegaklurus A dan juga B. Oleh karena itu,

$$C \cdot A = 2c_1 - 6c_2 - 3c_3 = 0 \quad \text{atau} \quad (1) \quad 2c_1 - 6c_2 = 3c_3$$

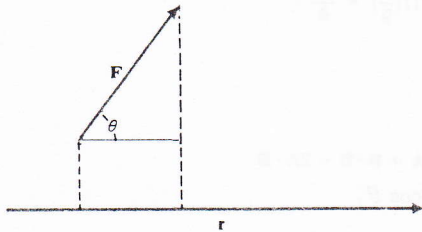
$$C \cdot B = 4c_1 + 3c_2 - c_3 = 0 \quad \text{atau} \quad (2) \quad 4c_1 + 3c_2 = c_3$$

$$\text{Pecahkan (1) dan (2) secara serempak : } c_1 = \frac{1}{2}c_3, \quad c_2 = -\frac{1}{3}c_3, \quad C = c_3\left(\frac{1}{2}i - \frac{1}{3}j + k\right).$$

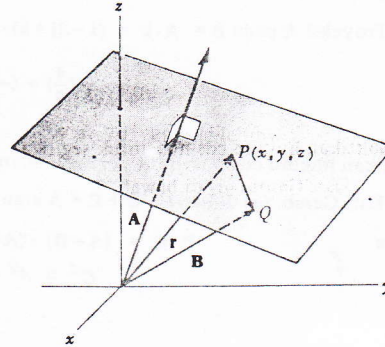
$$\text{Maka vektor satuan dalam arah C adalah } \frac{C}{|C|} = \frac{c_3\left(\frac{1}{2}i - \frac{1}{3}j + k\right)}{\sqrt{c_3^2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + (1)^2\right]}} = \pm\left(\frac{3}{7}i - \frac{2}{7}j + \frac{6}{7}k\right).$$

17. Carilah usaha yang dilakukan dalam menggerakkan sebuah obyek sepanjang vektor $r = 3i + 2j - 5k$ jika gaya yang dikenakan adalah $F = 2i - j - k$. Pergunakan Gambar (a) di balik sebagai acuan.

$$\begin{aligned}
 \text{Usaha yang dilakukan} &= (\text{besarnya gaya dalam arah gerak}) (\text{panjang lintasan yang ditempuh}) \\
 &= (F \cos \theta)(r) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r} \\
 &= (2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}) = 6 - 2 + 5 = 9.
 \end{aligned}$$



Gambar (a)



Gambar (b)

18. Carilah persamaan untuk bidang yang tegak lurus vektor $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ dan melalui titik terminal dari vektor $\mathbf{B} = \mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ (lihat Gambar (b) di atas).

Misalkan \mathbf{r} adalah vektor kedudukan dari titik P , dan Q titik terminal \mathbf{B} .

Karena $\mathbf{PQ} = \mathbf{B} - \mathbf{r}$ tegak lurus \mathbf{A} , $(\mathbf{B} - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{A} = 0$ atau $\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ adalah persamaan bidang yang dikehendaki dalam bentuk vektor. Dalam bentuk koordinat-koordinat tegak lurus, ini menjadi

$$(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \cdot (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}) = (\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \cdot (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k})$$

$$\text{atau} \quad 2x + 3y + 6z = (1)(2) + (5)(3) + (3)(6) = 35$$

19. Carilah jarak titik-asal ke bidang dalam Soal 18.

Jarak dari titik asal ke bidang adalah proyeksi \mathbf{B} pada \mathbf{A} .

$$\text{Vektor satuan dalam arah } \mathbf{A} \text{ adalah } \mathbf{a} = \frac{\mathbf{A}}{A} = \frac{2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}}{\sqrt{(2)^2 + (3)^2 + (6)^2}} = \frac{2}{7}\mathbf{i} + \frac{3}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k}.$$

$$\text{Maka, proyeksi } \mathbf{B} \text{ pada } \mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \cdot \left(\frac{2}{7}\mathbf{i} + \frac{3}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k}\right) = 1\left(\frac{2}{7}\right) + 5\left(\frac{3}{7}\right) + 3\left(\frac{6}{7}\right) = 5.$$

20. Jika \mathbf{A} adalah vektor sebarang, buktikan bahwa $\mathbf{A} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{k})\mathbf{k}$.

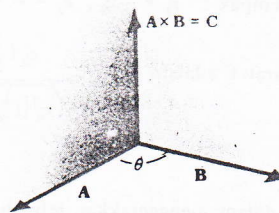
$$\text{Karena } \mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{i} = A_1\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + A_2\mathbf{j} \cdot \mathbf{i} + A_3\mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = A_1$$

$$\text{Dengan cara yang sama, } \mathbf{A} \cdot \mathbf{j} = A_2 \text{ dan } \mathbf{A} \cdot \mathbf{k} = A_3.$$

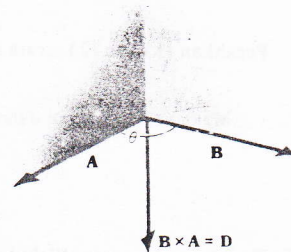
$$\text{Maka } \mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{k})\mathbf{k}.$$

HASIL KALI SILANG ATAU VEKTOR

21. Buktikan $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$



Gambar (a)



Gambar (b)

$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{C}$ besarnya $AB \sin \theta$ dan arahnya sedemikian rupa sehingga \mathbf{A} , \mathbf{B} dan \mathbf{C} membentuk sebuah sistem tangan kanan (Gambar (a) di halaman 22, bawah).

$\mathbf{B} \times \mathbf{A} = \mathbf{D}$ besarnya $BA \sin \theta$ dan arahnya sedemikian rupa sehingga \mathbf{B} , \mathbf{A} dan \mathbf{D} membentuk sebuah sistem tangan kanan (Gamb. (b) di halaman 22, bawah).

Maka \mathbf{D} besarnya sama dengan \mathbf{C} tetapi berlawanan arah, yakni $\mathbf{C} = -\mathbf{D}$ atau $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$.

Hukum komutatif tak berlaku untuk hasil kali silang.

22. Jika $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ dan \mathbf{A} beserta \mathbf{B} tidaklah nol, perlihatkan bahwa \mathbf{A} sejajar \mathbf{B} .

Jika $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = AB \sin \theta \mathbf{u} = \mathbf{0}$, maka $\sin \theta = 0$ dan $\theta = 0^\circ$ atau 180°

23. Perlihatkan bahwa $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|^2 + |\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}|^2 = |\mathbf{A}|^2 |\mathbf{B}|^2$.

$$\begin{aligned} |\mathbf{A} \times \mathbf{B}|^2 + |\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}|^2 &= |AB \sin \theta \mathbf{u}|^2 + |AB \cos \theta|^2 = A^2 B^2 \sin^2 \theta + A^2 B^2 \cos^2 \theta \\ &= A^2 B^2 = |\mathbf{A}|^2 |\mathbf{B}|^2 \end{aligned}$$

24. Hitunglah masing-masing yang berikut ini.

(a) $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$

(f) $\mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}$

(b) $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$

(g) $\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{k} \times \mathbf{i} = -\mathbf{j}$

(c) $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$

(h) $(2\mathbf{j}) \times (3\mathbf{k}) = 6 \mathbf{j} \times \mathbf{k} = 6\mathbf{i}$

(d) $\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{j} \times \mathbf{k} = -\mathbf{i}$

(i) $(3\mathbf{i}) \times (-2\mathbf{k}) = -6 \mathbf{i} \times \mathbf{k} = 6\mathbf{j}$

(e) $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0}$

(j) $2\mathbf{j} \times \mathbf{i} - 3\mathbf{k} = -2\mathbf{k} - 3\mathbf{k} = -5\mathbf{k}$

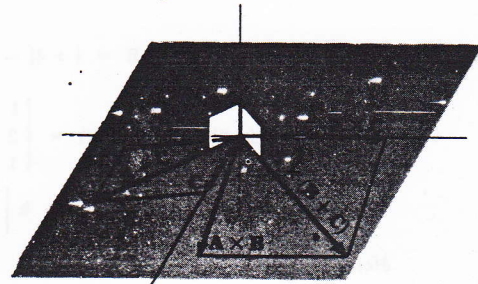
25. Buktikan bahwa $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$ untuk kasus dimana \mathbf{A} tegaklurus \mathbf{B} dan juga \mathbf{C} .

Karena \mathbf{A} tegaklurus \mathbf{B} , $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ adalah sebuah vektor yang besarnya $AB \sin 90^\circ = AB$ atau besarnya vektor \mathbf{AB} . Ini ekuivalen dengan mengalikan vektor \mathbf{B} dengan \mathbf{A} dan merotasikan vektor resultannya sebesar 90° ke kedudukan yang diperlihatkan dalam gambar di samping.

Dengan cara yang sama, $\mathbf{A} \times \mathbf{C}$ adalah vektor yang diperoleh dengan mengalikan \mathbf{C} dengan \mathbf{A} dan merotasikan vektor resultannya sebesar 90° ke kedudukan yang diperlihatkan.

Dengan cara yang sama, $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C})$ adalah vektor yang diperoleh dengan mengalikan $\mathbf{B} + \mathbf{C}$ dengan \mathbf{A} dan merotasikan vektor resultannya sebesar 90° ke kedudukan yang diperlihatkan.

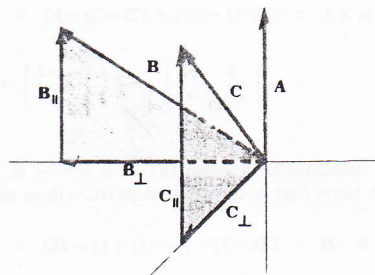
Karena $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C})$ adalah diagonal jajaran-genjang dengan sisi-sisi $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ dan $\mathbf{A} \times \mathbf{C}$, maka kita peroleh $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$.



26. Buktikan bahwa $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$ untuk kasus yang umum dimana \mathbf{A} , \mathbf{B} dan \mathbf{C} tak-koplanar.

Uraikan \mathbf{B} kedalam dua buah vektor komponen, dimana yang satunya tegaklurus \mathbf{A} dan yang lainnya sejajar \mathbf{A} , dan nyatakan masing-masingnya dengan \mathbf{B}_\perp dan \mathbf{B}_\parallel . Maka $\mathbf{B} = \mathbf{B}_\perp + \mathbf{B}_\parallel$.

Jika θ adalah sudut antara \mathbf{A} dan \mathbf{B} , maka $B_\perp =$



$B \sin \theta$. Jadi besarnya $A \times B_{\perp}$ adalah $AB \sin \theta$, sama dengan besarnya $A \times B$. Juga, arah dari $A \times B_{\perp}$ sama dengan arah dari $A \times B$. Oleh karena itu, $A \times B_{\perp} = A \times B$.

Dengan cara yang sama, jika C diuraikan ke dalam dua buah vektor komponen C_{\parallel} dan C_{\perp} yang masing-masingnya sejajar dan tegaklurus A , maka $A \times C_{\perp} = A \times C$.

Juga, oleh karena $B + C = B_{\parallel} + B_{\perp} + C_{\parallel} + C_{\perp} = (B_{\parallel} + C_{\parallel}) + (B_{\perp} + C_{\perp})$ maka darinya diperoleh

$$A \times (B_{\parallel} + C_{\parallel}) = A \times (B + C).$$

Sekarang, B_{\perp} dan C_{\perp} adalah vektor-vektor yang tegaklurus A sehingga menurut Soal 25,

$$A \times (B_{\perp} + C_{\perp}) = A \times B_{\perp} + A \times C_{\perp}$$

Maka

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$$

Jadi hukum distributif disini berlaku. Perkalikan dengan -1 , dan pergunakan Soal 21, hasil ini menjadi $(B + C) \times A = B \times A + C \times A$. Perhatikan bahwa urutan faktor-faktor dalam hasil-kali-silang adalah penting. Hukum-hukum aljabar biasa berlaku di sini hanya jika urutan yang sesuai tetap dipertahankan.

27. Jika $A = A_1i + A_2j + A_3k$ dan $B = B_1i + B_2j + B_3k$, buktikan bahwa $A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$.

$$\begin{aligned} A \times B &= (A_1i + A_2j + A_3k) \times (B_1i + B_2j + B_3k) \\ &= A_1i \times (B_1i + B_2j + B_3k) + A_2j \times (B_1i + B_2j + B_3k) + A_3k \times (B_1i + B_2j + B_3k) \\ &= A_1B_1i \times i + A_1B_2i \times j + A_1B_3i \times k + A_2B_1j \times i + A_2B_2j \times j + A_2B_3j \times k + A_3B_1k \times i + A_3B_2k \times j + A_3B_3k \times k \\ &= (A_2B_3 - A_3B_2)i + (A_3B_1 - A_1B_3)j + (A_1B_2 - A_2B_1)k = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

28. Jika $A = 2i - 3j - k$ dan $B = i + 4j - 2k$, carilah (a) $A \times B$, (b) $B \times A$, (c) $(A + B) \times (A - B)$.

$$\begin{aligned} (a) \quad A \times B &= (2i - 3j - k) \times (i + 4j - 2k) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} \\ &= i \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 10i + 3j + 11k \end{aligned}$$

Metode lain.

$$\begin{aligned} (2i - 3j - k) \times (i + 4j - 2k) &= 2i \times (i + 4j - 2k) - 3j \times (i + 4j - 2k) - k \times (i + 4j - 2k) \\ &= 2i \times i + 8i \times j - 4i \times k - 3j \times i - 12j \times j + 6j \times k - k \times i - 4k \times j + 2k \times k \\ &= 0 + 8k + 4j + 3k - 0 + 6i - j + 4i + 0 = 10i + 3j + 11k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b) \quad B \times A &= (i + 4j - 2k) \times (2i - 3j - k) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= i \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -10i - 3j - 11k. \end{aligned}$$

Bandungkan dengan (a), $A \times B = -B \times A$. Perhatikan bahwa ini ekuivalen dengan teorema : Jika dua buah baris dari determinan dipertukarkan maka determinannya berubah tanda.

$$(c) \quad A + B = (2i - 3j - k) + (i + 4j - 2k) = 3i + j - 3k$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = (2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}) - (\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = \mathbf{i} - 7\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\begin{aligned} \text{Maka } (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times (\mathbf{A} - \mathbf{B}) &= (3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}) \times (\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + \mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & -7 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -7 & 1 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = -20\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 22\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Metode lain.

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times (\mathbf{A} - \mathbf{B}) &= \mathbf{A} \times (\mathbf{A} - \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\mathbf{A} - \mathbf{B}) \\ &= \mathbf{A} \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \mathbf{A} - \mathbf{B} \times \mathbf{B} = \mathbf{0} - \mathbf{A} \times \mathbf{B} - \mathbf{A} \times \mathbf{B} - \mathbf{0} = -2\mathbf{A} \times \mathbf{B} \\ &= -2(10\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 11\mathbf{k}) = -20\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 22\mathbf{k}, \text{ penggunaan (a).} \end{aligned}$$

29. Jika $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, dan $\mathbf{C} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, carilah (a) $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$,
(b) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$.

$$(a) \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 5\mathbf{k}.$$

$$\text{Maka } (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = (-\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 5\mathbf{k}) \times (\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 7 & 5 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 24\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 5\mathbf{k}.$$

$$(b) \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 5\mathbf{k} = -5\mathbf{j} - 5\mathbf{k}.$$

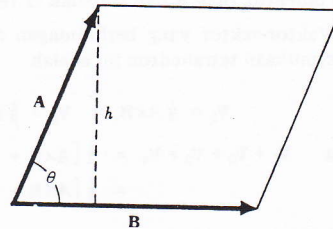
$$\text{Maka } \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \times (-5\mathbf{j} - 5\mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & -5 \end{vmatrix} = 15\mathbf{i} + 15\mathbf{j} - 15\mathbf{k}.$$

Jadi $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} \neq \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$, yang memperlihatkan perlunya tanda-kurung dalam $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \times \mathbf{C}$ untuk menghindari tafsir ganda.

30. Buktikanlah bahwa luas jajaran-genjang dengan sisi-sisi \mathbf{A} dan \mathbf{B} adalah $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$.

$$\begin{aligned} \text{Luas jajaran-genjang} &= h |\mathbf{B}| \\ &= |\mathbf{A}| \sin \theta |\mathbf{B}| \\ &= |\mathbf{A} \times \mathbf{B}|. \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa luas segitiga dengan sisi-sisi \mathbf{A} dan \mathbf{B} = $\frac{1}{2} |\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$.



31. Carilah luas segitiga yang titik-titik sudutnya berada di $P(1, 3, 2)$, $Q(2, -1, 1)$, $R(-1, 2, 3)$.

$$\begin{aligned} \mathbf{PQ} &= (2-1)\mathbf{i} + (-1-3)\mathbf{j} + (1-2)\mathbf{k} = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} - \mathbf{k} \\ \mathbf{PR} &= (-1-1)\mathbf{i} + (2-3)\mathbf{j} + (3-2)\mathbf{k} = -2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k} \end{aligned}$$

Dari Soal 30,

$$\begin{aligned} \text{Luas segitiga} &= \frac{1}{2} |\mathbf{PQ} \times \mathbf{PR}| = \frac{1}{2} |(\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - \mathbf{k}) \times (-2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k})| \\ &= \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -4 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |-5\mathbf{i} + \mathbf{j} - 9\mathbf{k}| = \frac{1}{2} \sqrt{(-5)^2 + (1)^2 + (-9)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{107}. \end{aligned}$$

32. Tentukan vektor satuan yang tegaklurus bidang dari $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ dan $\mathbf{B} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

$\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ adalah sebuah vektor yang tegaklurus bidang dari \mathbf{A} dan \mathbf{B} .

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -6 & -3 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 15\mathbf{i} - 10\mathbf{j} + 30\mathbf{k}$$

Vektor satuan yang sejajar $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ adalah $\frac{\mathbf{A} \times \mathbf{B}}{|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|} = \frac{15\mathbf{i} - 10\mathbf{j} + 30\mathbf{k}}{\sqrt{(15)^2 + (-10)^2 + (30)^2}} = \frac{3}{7}\mathbf{i} - \frac{2}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k}.$

Vektor satuan lainnya yang berlawanan arah adalah $(-3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k})/7$. Bandingkan dengan Soal 16.

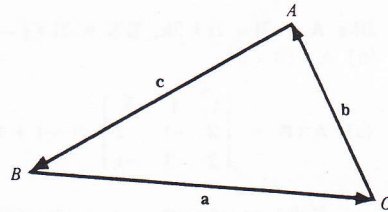
33. Buktikan hukum sinus untuk segitiga bidang.

Misalkan \mathbf{a} , \mathbf{b} dan \mathbf{c} menyatakan sisi-sisi segitiga ABC seperti diperlihatkan dalam gambar disamping; maka $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$. Perkalikan dengan $\mathbf{a} \times$, $\mathbf{b} \times$ dan $\mathbf{c} \times$ secara berturut-turut, kita peroleh

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$$

vakni $ab \sin C = bc \sin A = ca \sin B$

atau $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$



34. Pandang sebuah tetrahedron dengan permukaan-permukaan F_1, F_2, F_3, F_4 . Misalkan $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3, \mathbf{V}_4$ adalah vektor-vektor yang besarnya masing-masing sama dengan luas dari F_1, F_2, F_3, F_4 dan yang arah-arahnya tegaklurus pada permukaan-permukaan ini dalam arah keluar. Perhatikan bahwa $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3 + \mathbf{V}_4 = \mathbf{0}$.

Menurut Soal 30, luas permukaan sebuah segitiga yang dibentuk oleh \mathbf{R} dan \mathbf{S} adalah $\frac{1}{2} |\mathbf{R} \times \mathbf{S}|$.

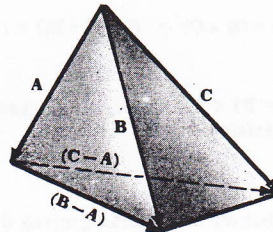
Vektor-vektor yang berhubungan dengan permukaan-permukaan tetrahedron ini adalah

$$\mathbf{V}_1 = \frac{1}{2} \mathbf{A} \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{V}_2 = \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{C}, \quad \mathbf{V}_3 = \frac{1}{2} \mathbf{C} \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{V}_4 = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{A}) \times (\mathbf{B} - \mathbf{A})$$

Maka $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3 + \mathbf{V}_4 = \frac{1}{2} [\mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \mathbf{C} + \mathbf{C} \times \mathbf{A} + (\mathbf{C} - \mathbf{A}) \times (\mathbf{B} - \mathbf{A})]$
 $= \frac{1}{2} [\mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \mathbf{C} + \mathbf{C} \times \mathbf{A} + \mathbf{C} \times \mathbf{B} - \mathbf{C} \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{A}] = \mathbf{0}.$

Hasil ini dapat diperluas untuk polihedra tertutup dan dalam keadaan limit untuk sebarang permukaan tertutup.

Dikarenakan oleh pemakaiannya yang disajikan disini, maka seringkali besaran luas diberi arah dan dalam hal ini kita berbicara mengenai vektor luas.

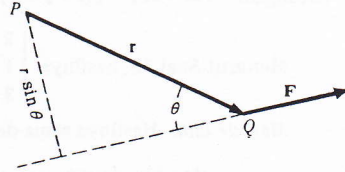


35. Carilah suatu pernyataan untuk momen dari sebuah gaya \mathbf{F} terhadap sebuah titik P .

Momen \mathbf{M} dan \mathbf{F} terhadap P besarnya sama dengan F kali jarak tegak-lurus P ke garis-kerja dari \mathbf{F} . Maka jika \mathbf{r} adalah vektor dari P ke titik-pangkal Q dari \mathbf{F} ,

$$M = F(r \sin \theta) = rF \sin \theta = |\mathbf{r} \times \mathbf{F}|$$

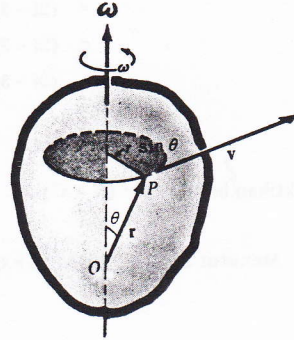
Bila kita membayangkan sebuah sekerup berulir-kanan (right-threaded) di P yang tegak-lurus bidang dari r dan F , maka bila gaya F bekerja, sekerupnya akan bergerak dalam arah $r \times F$. Dikarenakan hal ini, maka adalah sesuai untuk mendefinisikan momen sebagai vektor $M = r \times F$.



36. Sebuah benda-kaku berotasi mengelilingi sebuah sumbu yang melalui titik O dengan besar kecepatan sudut ω . Buktikan bahwa kecepatan linear v dari sebuah titik P dari benda dengan vektor kedudukan r diberikan oleh $v = \omega \times r$, dimana ω adalah vektor yang besarnya ω dan arahnya sesuai dengan arah majunya sekrup bila mengalami rotasi yang sama.

Karena P melintasi sebuah lingkaran berjari $r \sin \theta$, maka besarnya kecepatan linear v adalah $\omega (r \sin \theta) = |\omega \times r|$. Juga, v haruslah tegak-lurus ω dan r kedua-duanya sedemikian rupa sehingga r , ω dan v membentuk sebuah sistem tangan-kanan.

Maka besar dan arah v sesuai dengan $\omega \times r$, oleh karena itu $v = \omega \times r$. Vektor ω disebut *kecepatan sudut*.



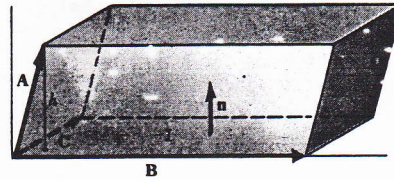
HASIL KALI TRIPEL.

37. Perhatikan bahwa harga mutlak dari $A \cdot (B \times C)$ sama dengan volume paralelepipedum dengan sisi-sisi A , B dan C .

Misalkan n adalah normal-satuan terhadap jajaran-genjang I , yang searah dengan $B \times C$ dan misalkan h adalah tinggi dari titik-terminal A di atas jajaran-genjang I .

Volume paralelepipedum = (tinggi h) (luas jajaran-genjang I).

$$\begin{aligned} &= (A \cdot n)(|B \times C|) \\ &= A \cdot \{|B \times C| n\} = A \cdot (B \times C) \end{aligned}$$



Jika A , B dan C tidak membentuk sebuah sistem tangan-kanan maka $A \cdot n < 0$ dan volumenya $= |A \cdot (B \times C)|$.

38. Jika $A = A_1i + A_2j + A_3k$, $B = B_1i + B_2j + B_3k$, $C = C_1i + C_2j + C_3k$ perhatikan bahwa

$$A \cdot (B \times C) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

$$A \cdot (B \times C) = A \cdot \begin{vmatrix} i & j & k \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

$$= (A_1i + A_2j + A_3k) \cdot [(B_2C_3 - B_3C_2)i + (B_3C_1 - B_1C_3)j + (B_1C_2 - B_2C_1)k]$$

$$= A_1(B_2C_3 - B_3C_2) + A_2(B_3C_1 - B_1C_3) + A_3(B_1C_2 - B_2C_1) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

39. Hitunglah $(2i - 3j) \cdot [(i + j - k) \times (3i - k)]$.

Menurut Soal 38, hasilnya $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 4$.

Metode lain. Hasilnya sama-dengan

$$\begin{aligned} (2i - 3j) \cdot [i \times (3i - k) + j \times (3i - k) - k \times (3i - k)] \\ = (2i - 3j) \cdot [3i \times i - i \times k + 3j \times i - j \times k - 3k \times i + k \times k] \\ = (2i - 3j) \cdot (0 + j - 3k - i - 3j + 0) \\ = (2i - 3j) \cdot (-i - 2j - 3k) = (2)(-1) + (-3)(-2) + (0)(-3) = 4. \end{aligned}$$

40. Buktikan bahwa $A \cdot (B \times C) = B \cdot (C \times A) = C \cdot (A \times B)$.

Menurut Soal 38, $A \cdot (B \times C) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$

Menurut salah satu teorema dari determinan yang menyatakan bahwa pertukaran dua buah baris dari sebuah determinan merubah tandanya, maka kita peroleh

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} &= - \begin{vmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = B \cdot (C \times A) \\ \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} &= - \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = C \cdot (A \times B) \end{aligned}$$

41. Perhatikan bahwa $A \cdot (B \times C) = (A \times B) \cdot C$.

Dari Soal 40, $A \cdot (B \times C) = C \cdot (A \times B) = (A \times B) \cdot C$

Kadang-kadang $A \cdot (B \times C)$ ditulis tanpa tanda-kurung seperti $A \cdot B \times C$. Dalam hal demikian tak mungkin timbul tafsir ganda karena interpretasi yang hanya mungkin adalah $A \cdot (B \times C)$ dan $(A \cdot B) \times C$. Akan tetapi yang terakhir tak mempunyai arti karena hasil kali silang antara skalar dan vektor tidak didefinisikan.

Hasil $A \cdot B \times C = A \times B \cdot C$ seringkali diringkas dalam pernyataan bahwa titik dan silang dapat saling dipertukarkan tanpa mempengaruhi hasilnya.

42. Buktikan bahwa $A \cdot (A \times C) = 0$.

Dari Soal 41, $A \cdot (A \times C) = (A \times A) \cdot C = 0$.

43. Buktikan bahwa syarat perlu dan cukup agar vektor-vektor A , B dan C koplanar adalah $A \cdot B \times C = 0$.

Perhatikan bahwa $A \cdot B \times C$ tak dapat berarti lain daripada $A \cdot (B \times C)$.

Jika A , B dan C koplanar, maka volume paralelepipedum yang dibentuk mereka adalah nol. Maka menurut Soal 37, $A \cdot B \times C = 0$.

Sebaliknya, jika $A \cdot B \times C = 0$, maka volume paralelepipedum yang dibentuk oleh vektor-vektor A , B dan C adalah nol, dan dengan demikian vektor-vektor haruslah terletak dalam sebuah bidang.

44. Misalkan $r_1 = x_1 i + y_1 j + z_1 k$, $r_2 = x_2 i + y_2 j + z_2 k$ dan $r_3 = x_3 i + y_3 j + z_3 k$ adalah vektor-vektor kedu-

dukan dari titik-titik $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ dan $P_3(x_3, y_3, z_3)$. Carilah persamaan untuk bidang yang melalui P_1 , P_2 dan P_3 .

Kita menganggap bahwa P_1 , P_2 dan P_3 tidak terletak pada sebuah garis-lurus; oleh karena itu mereka menentukan sebuah bidang.

Misalkan $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ menyatakan vektor kedudukan dari sebarang titik $P(x, y, z)$ dalam bidang diatas. Pandang vektor-vektor $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_3 = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1$ dan $\mathbf{P}_1\mathbf{P} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_1$ yang semuanya terletak dalam bidang.

Menurut Soal 43, $\mathbf{P}_1\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \times \mathbf{P}_1\mathbf{P}_3 = 0$ atau

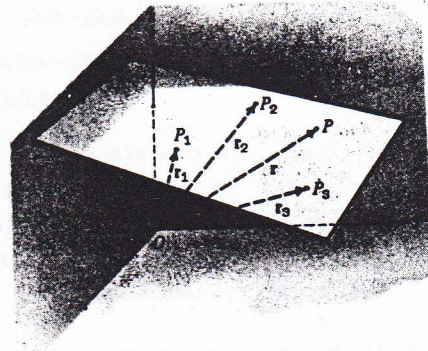
$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) = 0$$

Dalam koordinat-koordinat tegak-lurus persamaan ini menjadi

$$[(x-x_1)\mathbf{i} + (y-y_1)\mathbf{j} + (z-z_1)\mathbf{k}] \cdot [(x_2-x_1)\mathbf{i} + (y_2-y_1)\mathbf{j} + (z_2-z_1)\mathbf{k}] \times [(x_3-x_1)\mathbf{i} + (y_3-y_1)\mathbf{j} + (z_3-z_1)\mathbf{k}] = 0$$

atau, penggunaan Soal 38,

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$



45. Carilah persamaan untuk bidang yang ditentukan oleh titik-titik $P_1(2, -1, 1)$, $P_2(3, 2, -1)$ dan $P_3(-1, 3, 2)$.

Vektor-vektor kedudukan dari P_1, P_2, P_3 dan sebarang titik $P(x, y, z)$ adalah berturut-turut $\mathbf{r}_1 = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{r}_2 = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{r}_3 = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ dan $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

Maka $\mathbf{P}_1\mathbf{P} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_1$, $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, $\mathbf{P}_3\mathbf{P}_1 = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1$ semuanya terletak dalam bidang yang dikehendaki, sehingga $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) = 0$

yakni

$$[(x-2)\mathbf{i} + (y+1)\mathbf{j} + (z-1)\mathbf{k}] \cdot [\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}] \times [-3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}] = 0$$

$$[(x-2)\mathbf{i} + (y+1)\mathbf{j} + (z-1)\mathbf{k}] \cdot [11\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 13\mathbf{k}] = 0$$

$$11(x-2) + 5(y+1) + 13(z-1) = 0 \quad \text{atau} \quad 11x + 5y + 13z = 30.$$

46. Jika titik-titik P, Q dan R semuanya tidak terletak dalam garis-lurus yang sama dan vektor-vektor kedudukannya relatif terhadap titik asal adalah \mathbf{a}, \mathbf{b} dan \mathbf{c} maka perhatikan bahwa $\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a}$ adalah sebuah vektor yang tegak-lurus bidang dari P, Q dan R .

Misalkan \mathbf{r} adalah vektor kedudukan dari sebarang titik dalam bidang dari P, Q dan R . Maka vektor-vektor $\mathbf{r} - \mathbf{a}, \mathbf{b} - \mathbf{a}$ dan $\mathbf{c} - \mathbf{a}$ koplanar, sehingga menurut Soal 43.

$$(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a}) = 0 \quad \text{atau} \quad (\mathbf{r} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a}) = 0.$$

Jadi $\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a}$ tegak-lurus pada $\mathbf{r} - \mathbf{a}$ dan dengan demikian tegak-lurus bidang dari P, Q dan R .

47. Buktikan : (a) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$, (b) $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$.

(a) Misalkan $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$, $\mathbf{C} = C_1\mathbf{i} + C_2\mathbf{j} + C_3\mathbf{k}$.

$$\begin{aligned} \text{Maka } \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}) \times \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} \\ &= (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}) \times ([B_2C_3 - B_3C_2]\mathbf{i} + [B_3C_1 - B_1C_3]\mathbf{j} + [B_1C_2 - B_2C_1]\mathbf{k}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_2C_3 - B_3C_2 & B_3C_1 - B_1C_3 & B_1C_2 - B_2C_1 \end{vmatrix} \\
&= (A_2B_1C_2 - A_2B_2C_1 - A_3B_3C_1 + A_3B_1C_3)\mathbf{i} + (A_3B_2C_3 - A_3B_3C_2 - A_1B_1C_2 + A_1B_2C_1)\mathbf{j} \\
&\quad + (A_1B_3C_1 - A_1B_1C_3 - A_2B_2C_3 + A_2B_3C_2)\mathbf{k}
\end{aligned}$$

Juga, $\mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$

$$\begin{aligned}
&= (B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k})(A_1C_1 + A_2C_2 + A_3C_3) - (C_1\mathbf{i} + C_2\mathbf{j} + C_3\mathbf{k})(A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3) \\
&= (A_2B_1C_2 + A_3B_1C_3 - A_2C_1B_2 - A_3C_1B_3)\mathbf{i} + (B_2A_1C_1 + B_2A_3C_3 - C_2A_1B_1 - C_2A_3B_3)\mathbf{j} \\
&\quad + (B_3A_1C_1 + B_3A_2C_2 - C_3A_1B_1 - C_3A_2B_2)\mathbf{k}
\end{aligned}$$

dan dari sini diperoleh hasilnya.

(b) $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = -\mathbf{C} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = -\{\mathbf{A}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{A})\} = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$ dengan menggantikan \mathbf{A} , \mathbf{B} dan \mathbf{C} dalam (a) berturut-turut dengan \mathbf{C} , \mathbf{A} dan \mathbf{B} .

Perhatikan bahwa $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \neq (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$, yang berarti bahwa hukum asosiatif untuk hasil kali silang tak berlaku bagi semua vektor \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} .

48. Buktikan : $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$.

Dari Soal 41, $\mathbf{X} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{X} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{D}$. Misalkan $\mathbf{X} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$; maka

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) &= \{(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}\} \cdot \mathbf{D} = \{\mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\} \cdot \mathbf{D} \\
&= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}), \quad \text{gunakan Soal 47 (b).}
\end{aligned}$$

49. Buktikan : $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) + \mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) + \mathbf{C} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{0}$.

Menurut Soal 47 (a),

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

$$\mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) - \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$$

$$\mathbf{C} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{A})$$

Jumlahkan, maka diperoleh hasilnya.

50. Buktikan : $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \times \mathbf{D}) - \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \times \mathbf{D}) = \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{D}) - \mathbf{D}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C})$.

Menurut Soal 47 (a), $\mathbf{X} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = \mathbf{C}(\mathbf{X} \cdot \mathbf{D}) - \mathbf{D}(\mathbf{X} \cdot \mathbf{C})$. Misalkan $\mathbf{X} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$; maka

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = \mathbf{C}(\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - \mathbf{D}(\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$$

$$= \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{D}) - \mathbf{D}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C})$$

Menurut Soal 47 (b) $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{Y} = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{Y}) - \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{Y})$. Misalkan $\mathbf{Y} = \mathbf{C} \times \mathbf{D}$; maka

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \times \mathbf{D}) - \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \times \mathbf{D}).$$

51. Misalkan PQR sebuah segitiga bola yang sisi-sisinya p, q, r adalah busur-busur dari lingkaran-lingkaran besar. Buktikan bahwa

$$\frac{\sin P}{\sin p} = \frac{\sin Q}{\sin q} = \frac{\sin R}{\sin r}$$

Andaikan bahwa bolanya (lihat gambar di halaman 31) berjejari satuan, dan misalkan vektor-vektor satuan \mathbf{A}, \mathbf{B} , dan \mathbf{C} digambarkan dari titik-pusat bola O berturut-turut ke P, Q , dan R . Dari Soal 50,

$$(1) \quad (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}) \mathbf{A}$$

Vektor satuan yang tegak-lurus $A \times B$ dan $A \times C$ adalah A , sehingga (1) menjadi

$$(2) \quad \sin r \sin q \sin P \cdot A = (A \cdot B \times C) A \quad \text{atau}$$

$$(3) \quad \sin r \sin q \sin P = A \cdot B \times C$$

Dengan mempermutasikan p, q, r, P, Q, R dan A, B, C secara siklis, kita dapati

$$(4) \quad \sin p \sin r \sin Q = B \cdot C \times A$$

$$(5) \quad \sin q \sin p \sin R = C \cdot A \times B$$

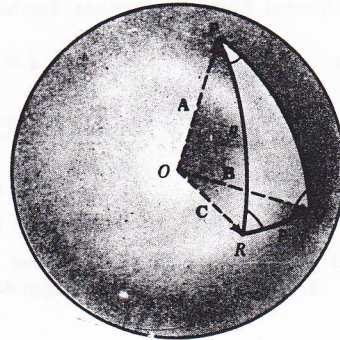
Karena ruas kanan dari (3), (4) dan (5) adalah sama (Soal 40) maka

$$\sin r \sin q \sin P = \sin p \sin r \sin Q = \sin q \sin p \sin R$$

yang darinya kita peroleh

$$\frac{\sin P}{\sin p} = \frac{\sin Q}{\sin q} = \frac{\sin R}{\sin r}$$

Pernyataan ini disebut *hukum sinus* untuk segitiga bola.



52. Buktikan : $(A \times B) \cdot (B \times C) \times (C \times A) = (A \cdot B \times C)^2$.

Menurut Soal 47 (a), $X \times (C \times A) = C(X \cdot A) - A(X \cdot C)$. Misalkan $X = B \times C$; maka

$$\begin{aligned} (B \times C) \times (C \times A) &= C(B \times C \cdot A) - A(B \times C \cdot C) \\ &= C(A \cdot B \times C) - A(B \cdot C \times C) = C(A \cdot B \times C) \end{aligned}$$

Jadi

$$\begin{aligned} (A \times B) \cdot (B \times C) \times (C \times A) &= (A \times B) \cdot C(A \cdot B \times C) \\ &= (A \times B \cdot C)(A \cdot B \times C) = (A \cdot B \times C)^2 \end{aligned}$$

53. Diketahui vektor-vektor $a' = \frac{b \times c}{a \cdot b \times c}$, $b' = \frac{c \times a}{a \cdot b \times c}$ dan $c' = \frac{a \times b}{a \cdot b \times c}$,

perlihatkan bahwa jika $a \cdot b \times c \neq 0$, maka

(a) $a' \cdot a = b' \cdot b = c' \cdot c = 1$,

(b) $a' \cdot b = a' \cdot c = 0$, $b' \cdot a = b' \cdot c = 0$, $c' \cdot a = c' \cdot b = 0$,

(c) jika $a \cdot b \times c = V$ maka $a' \cdot b' \times c' = 1/V$.

(d) a', b' dan c' tak-koplanar jika a, b dan c tak-koplanar.

(a) $a' \cdot a = a \cdot a' = a \cdot \frac{b \times c}{a \cdot b \times c} = \frac{a \cdot b \times c}{a \cdot b \times c} = 1$

$$b' \cdot b = b \cdot b' = b \cdot \frac{c \times a}{a \cdot b \times c} = \frac{b \cdot c \times a}{a \cdot b \times c} = \frac{a \cdot b \times c}{a \cdot b \times c} = 1$$

$$c' \cdot c = c \cdot c' = c \cdot \frac{a \times b}{a \cdot b \times c} = \frac{c \cdot a \times b}{a \cdot b \times c} = \frac{a \cdot b \times c}{a \cdot b \times c} = 1$$

(b) $a' \cdot b = b \cdot a' = b \cdot \frac{b \times c}{a \cdot b \times c} = \frac{b \cdot b \times c}{a \cdot b \times c} = \frac{b \times b \cdot c}{a \cdot b \times c} = 0$

Dengan cara yang sama diperoleh hasil-hasil lainnya. Hasil-hasil ini dapat dilihat dengan memperhatikan bahwa misalnya, a' arahnya sejajar $b \times c$ sehingga dengan demikian haruslah tegak-lurus b dan c dari mana diperoleh $a' \cdot b = 0$ dan $a' \cdot c = 0$.

Dari (a) dan (b) kita melihat bahwa himpunan vektor-vektor \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} dan \mathbf{a}' , \mathbf{b}' , \mathbf{c}' adalah vektor-vektor resiprokal. Lihat pula Soal-soal Tambahan 104 dan 106.

$$(c) \quad \mathbf{a}' = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{V}, \quad \mathbf{b}' = \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{a}}{V}, \quad \mathbf{c}' = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{V}$$

$$\begin{aligned} \text{Maka } \mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}' \times \mathbf{c}' &= \frac{(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})}{V^3} = \frac{(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a})}{V^3} \\ &= \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c})^2}{V^3} = \frac{V^2}{V^3} = \frac{1}{V} \quad \text{pergunakan Soal 52.} \end{aligned}$$

(d) Menurut Soal 43, jika \mathbf{a} , \mathbf{b} dan \mathbf{c} tak-koplanar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} \neq 0$. Maka dari bagian (c) diperoleh bahwa $\mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}' \times \mathbf{c}' \neq 0$, sehingga dengan demikian \mathbf{a}' , \mathbf{b}' dan \mathbf{c}' juga tak-koplanar.

54. Perhatikan bahwa sebarang vektor \mathbf{r} dapat dinyatakan dalam vektor-vektor resiprokal dari Soal 53 seperti

$$\mathbf{r} = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}')\mathbf{a} + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{b}')\mathbf{b} + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{c}')\mathbf{c}.$$

$$\text{Dari Soal 50,} \quad \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \times \mathbf{D}) - \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \times \mathbf{D}) = \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{D}) - \mathbf{D}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C})$$

$$\text{Maka} \quad \mathbf{D} = \frac{\mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \times \mathbf{D})}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}} - \frac{\mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \times \mathbf{D})}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}} + \frac{\mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{D})}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}}$$

Misalkan $\mathbf{A} = \mathbf{a}$, $\mathbf{B} = \mathbf{b}$, $\mathbf{C} = \mathbf{c}$ dan $\mathbf{D} = \mathbf{r}$. Maka

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}} \mathbf{a} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{c} \times \mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}} \mathbf{b} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}} \mathbf{c} \\ &= \mathbf{r} \cdot \left(\frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}} \right) \mathbf{a} + \mathbf{r} \cdot \left(\frac{\mathbf{c} \times \mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}} \right) \mathbf{b} + \mathbf{r} \cdot \left(\frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}} \right) \mathbf{c} \\ &= (\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}')\mathbf{a} + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{b}')\mathbf{b} + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{c}')\mathbf{c} \end{aligned}$$

Soal-soal Tambahan

55. Hitunglah : (a) $\mathbf{k} \cdot (\mathbf{i} + \mathbf{j})$, (b) $(\mathbf{i} - 2\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{j} + 3\mathbf{k})$, (c) $(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \cdot (3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k})$.
Jawab. (a) 0 (b) -6 (c) 1

56. Jika $\mathbf{A} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ dan $\mathbf{B} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, carilah :

(a) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, (b) A , (c) B , (d) $|3\mathbf{A} + 2\mathbf{B}|$, (e) $(2\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} - 2\mathbf{B})$.

Jawab. (a) -10 (b) $\sqrt{14}$ (c) 6 (d) $\sqrt{150}$ (e) -14

57. Carilah sudut antara : (a) $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ dan $\mathbf{B} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, (b) $\mathbf{C} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ dan $\mathbf{D} = 3\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

Jawab. (a) 90° (b) $\arccos 8/21 = 67^\circ 36'$

58. Untuk harga-harga a yang manakah $\mathbf{A} = a\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ dan $\mathbf{B} = 2a\mathbf{i} + a\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ saling tegak-lurus?

Jawab. $a = 2, -1$.

59. Carilah sudut lancip yang dibuat oleh garis yang menghubungkan titik-titik $(1, -3, 2)$ dan $(3, -5, 1)$ dengan sumbu-sumbu koordinat. Jawab. $\arccos 2/3$, $\arccos 2/3$, $\arccos 1/3$ atau $48^\circ 12'$, $48^\circ 12'$, $70^\circ 32'$

60. Carilah cosinus-cosinus arah dari garis yang menghubungkan titik-titik $(3, 2, -4)$ dan $(1, -1, 2)$

Jawab. $2/7$, $3/7$, $-6/7$ atau $-2/7$, $-3/7$, $6/7$.

61. Dua buah sisi sebuah segitiga dibentuk oleh vektor-vektor $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ dan $\mathbf{B} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. Tentukan sudut-sudut dari segitiga ini. Jawab. $\arccos 7/\sqrt{75}$, $\arccos \sqrt{26}/\sqrt{75}$, 90° atau $36^\circ 4'$, $53^\circ 56'$, 90°

62. Diagonal-diagonal sebuah jajaran-genjang diberikan oleh $A = 3i - 4j - k$ dan $B = 2i + 3j - 6k$. Perhatikan bahwa jajaran-genjangnya adalah sebuah belah-ketupat dan tentukan panjang sisi-sisi dan sudut-sudutnya.
Jawab. $5\sqrt{3}/2$, $\arccos 23/75$, $180^\circ - \arccos 23/75$ atau $4,33$, $72^\circ 8'$, $107^\circ 52'$
63. Carilah proyeksi vektor $2i - 3j + 6k$ pada vektor $i + 2j + 2k$. *Jawab.* $8/3$
64. Carilah proyeksi vektor $4i - 3j + k$ pada garis yang melalui titik-titik $(2, 3, -1)$ dan $(-2, -4, 3)$.
Jawab. 1.
65. Jika $A = 4i - 3j + 3k$ dan $B = -2i + j - 2k$, carilah vektor satuan yang tegak-lurus A dan B .
Jawab. $\pm (i - 2j - 2k)/3$
66. Carilah sudut lancip yang dibentuk oleh dua buah diagonal sebuah kubus. *Jawab.* $\arccos 1/3$ atau $70^\circ 32'$
67. Carilah vektor satuan yang sejajar bidang xy dan tegak-lurus pada vektor $4i - 3j + k$. *Jawab.* $\pm (3i + 4j)/5$
68. Perhatikan bahwa $A = (2i - 2j + k)/3$, $B = (i + 2j + 2k)/3$ dan $C = (2i + j - 2k)/3$ adalah vektor-vektor satuan yang saling tegak-lurus.
69. Carilah usaha yang dilakukan dalam menggerakkan sebuah obyek sepanjang garis lurus dari $(3, 2, -1)$ hingga $(2, -1, 4)$ dalam sebuah medan gaya yang diberikan oleh $F = 4i - 3j + 2k$. *Jawab.* 15
70. Misalkan F sebuah medan-gaya konstan. Perhatikan bahwa usaha yang dilakukan dalam menggerakkan sebuah obyek mengelilingi sebarang poligon tertutup dalam medan ini adalah nol.
71. Buktikan bahwa sudut yang dibentuk dalam sebuah setengah-lingkaran adalah siku-siku.
72. Misalkan $ABCD$ sebuah jajaran-genjang. Buktikan bahwa $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2$.
73. Jika $ABCD$ adalah sebarang empat-persegi-panjang dan P dan Q adalah titik-titik tengah dari diagonal-diagonalnya, buktikan bahwa $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 + 4\overline{PQ}^2$
- Ini adalah perluasan dari soal sebelumnya.
74. (a) Carilah persamaan sebuah bidang yang tegak-lurus pada vektor A yang diketahui dan berjarak p dari titik-asal.
 (b) Nyatakan persamaan dari (a) dalam koordinat-koordinat tegak-lurus.
Jawab. (a) $r \cdot n = p$, di mana $n = A/A$; (b) $A_1x + A_2y + A_3z = Ap$
75. Misalkan r_1 dan r_2 vektor-vektor satuan dalam bidang xy yang membuat sudut-sudut α dan β dengan sumbu x positif.
 (a). Buktikan bahwa $r_1 = \cos \alpha i + \sin \alpha j$, $r_2 = \cos \beta i + \sin \beta j$.
 (b). Dengan meninjau r_1 , r_2 , buktikan rumus trigonometri
 $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$, $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$
76. Misalkan a adalah vektor kedudukan dari sebuah titik (x_1, y_1, z_1) yang diketahui, dan r vektor kedudukan dari sebarang titik (x, y, z) . Nyatakan tempat-kedudukan dari r jika (a) $|r - a| = 3$, (b) $(r - a) \cdot a = 0$, (c) $(r - a) \cdot r = 0$.
Jawab. (a). Permukaan bola, pusatnya di (x_1, y_1, z_1) dan berjari 3.
 (b). Bidang yang tegak-lurus a dan melalui titik terminalnya.
 (c). Permukaan bola dengan pusat di $(x_1/2, y_1/2, z_1/2)$ dan berjari $\frac{1}{2}\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$, atau sebuah permukaan bola dengan a sebagai diameter.
77. Diketahui $A = 3i + j + 2k$ dan $B = i - 2j - 4k$ adalah berturut-turut vektor-vektor kedudukan dari titik-titik P dan Q .
 (a). Carilah persamaan bidang yang melalui Q dan tegak-lurus garis PQ .
 (b). Berapakah jarak dari titik $(-1, 1, 1)$ ke bidang?
Jawab. (a) $(r - B) \cdot (A - B) = 0$ atau $2x + 3y + 6z = -28$; (b) 5.
78. Hitunglah masing-masing yang berikut ini :
 (a) $2j \times (3i - 4k)$, (b) $(i + 2j) \times k$, (c) $(2i - 4k) \times (i + 2j)$, (d) $(4i + j - 2k) \times (3i + k)$, (e) $(2i + j - k) \times (3i - 2j + 4k)$.
Jawab. (a) $-8i - 6k$, (b) $2i - j$, (c) $8i - 4j + 4k$, (d) $i - 10j - 3k$, (e) $2i - 11j - 7k$

79. Jika $A = 3i - j - 2k$ dan $B = 2i + 3j + k$, carilah : (a) $|A \times B|$, (b) $(A + 2B) \times (2A - B)$,
(c) $|(A + B) \times (A - B)|$.

Jawab. (a) $\sqrt{195}$, (b) $-25i + 35j - 55k$, (c) $2\sqrt{195}$

80. Jika $A = i - 2j - 3k$, $B = 2i + j - k$ dan $C = i + 3j - 2k$, carilah :

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} |A \times B| \times C, & \text{(c)} A \cdot (B \times C), & \text{(e)} (A \times B) \times (B \times C) \\ \text{(b)} |A \times (B \times C)|, & \text{(d)} (A \times B) \cdot C, & \text{(f)} (A \times B) \cdot (B \cdot C) \end{array}$$

Jawab. (a) $5\sqrt{26}$, (b) $3\sqrt{10}$, (c) -20 , (d) -20 , (e) $-40i - 20j + 20k$, (f) $35i - 35j + 35k$

81. Perhatikan bahwa jika $A \neq 0$ dan kedua persyaratan berikut (a) $A \cdot B = A \cdot C$ dan (b) $A \times B = A \times C$ berlaku secara serempak maka $B = C$, tetapi jika hanya salah satu dari persyaratan ini yang berlaku maka $B \neq C$.

82. Carilah luas jajaran-genjang yang memiliki diagonal-diagonal $A = 3i + j - 2k$ dan $B = i - 3j + 4k$.

Jawab. $5\sqrt{3}$.

83. Carilah luas segitiga yang titik-titik sudutnya pada $(3, -1, 2)$, $(1, -1, -3)$ dan $(4, -3, 1)$. Jawab. $\frac{1}{2}\sqrt{165}$.

84. Jika $A = 2i + j - 3k$ dan $B = i - 2j + k$, carilah sebuah vektor yang besarnya 5 dan tegak-lurus A dan B.

Jawab. $\pm \frac{5\sqrt{3}}{3}(i + j + k)$

85. Penggunaan Soal 75 untuk menurunkan rumus

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta, \quad \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

86. Sebuah gaya yang diberikan oleh $F = 3i + 2j - 4k$ dikenakan pada titik $(1, -1, 2)$. Carilah momen dari F terhadap titik $(2, -1, 3)$. Jawab. $2i - 7j - 2k$.

87. Kecepatan sudut dari sebuah benda-kaku yang berotasi mengelilingi sebuah sumbu rotasi diberikan oleh $\omega = 4i + j - 2k$. Carilah kecepatan linear dari sebuah titik P pada benda di mana vektor kedudukannya relatif terhadap sebuah titik pada sumbu rotasi adalah $2i - 3j + k$. Jawab. $-5i - 8j - 14k$.

88. Sederhanakan $(A + B) \cdot (B + C) \times (C + A)$.

Jawab. $2A \cdot B \times C$

$$89. \text{Buktikan bahwa } (A \cdot B \times C)(a \cdot b \times c) = \begin{vmatrix} A \cdot a & A \cdot b & A \cdot c \\ B \cdot a & B \cdot b & B \cdot c \\ C \cdot a & C \cdot b & C \cdot c \end{vmatrix}$$

90. Carilah volume sebuah paralelepipedum yang sisi-sisinya dinyatakan oleh $A = 2i - 3j + 4k$, $B = i + 2j - k$,
 $C = 3i - j + 2k$. Jawab. 7.

91. Jika $A \cdot B \times C = 0$, perhatikan bahwa atau (a) A, B dan C koplanar tetapi tak ada dua buah vektor darinya yang kolinear, atau (b) dua buah vektor dari A, B dan C kolinear, atau (c) semua vektor A, B dan C kolinear.

92. Carilah konstanta a sehingga vektor-vektor $2i - j + k$, $i + 2j - 3k$ dan $3i + aj + 5k$ koplanar. Jawab. $a = -4$.

93. Jika $A = x_1a + y_1b + z_1c$, $B = x_2a + y_2b + z_2c$ dan $C = x_3a + y_3b + z_3c$, buktikan bahwa

$$A \cdot B \times C = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} (a \cdot b \times c)$$

94. Buktikan bahwa syarat perlu dan cukup agar $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$ adalah $(A \times C) \times B = 0$. Bahaslah kasus dimana $A \cdot B = 0$ atau $B \cdot C = 0$.

95. Misalkan titik-titik P, Q dan R memiliki vektor-vektor kedudukan $r_1 = 3i - 2j - k$, $r_2 = i + 3j + 4k$ dan $r_3 = 2i + j - 2k$ relatif terhadap titik-asal O. Carilah jarak dari P ke bidang OQR. Jawab. 3.

96. Carilah jarak terpendek dari $(6, -4, 4)$ ke garis yang menghubungkan $(2, 1, 2)$ dan $(3, -1, 4)$. *Jawab.* 3
97. Diketahui titik-titik $P(2, 1, 3)$, $Q(1, 2, 1)$, $R(-1, -2, -2)$ dan $S(1, -4, 0)$, carilah jarak terpendek antara garis-garis PQ dan RS . *Jawab.* $3\sqrt{2}$
98. Buktikan bahwa garis-garis tinggi dari sebuah segitiga (garisnya diperpanjang bila perlu) berpotongan disebuah titik (*orthocenter* dari segitiga).
99. Buktikan bahwa garis-garis sumbu dari sisi-sisi sebuah segitiga berpotongan disebuah titik (*circumcenter* dari segitiga).

100. Buktikan bahwa $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) + (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{D}) + (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{D}) = 0$.

101. Misalkan PQR sebuah segitiga bola yang sisi-sisinya p, q, r adalah busur-busur dari lingkaran-lingkaran besar. Buktikan *hukum cosinus* untuk segitiga bola,

$$\cos p = \cos q \cos r + \sin q \sin r \cos P$$

dan juga rumus yang analog untuk $\cos q$ dan $\cos r$ yang diperoleh melalui permutasi siklis dari huruf-huruf.

[Petunjuk : Interpretasikan kedua belah ruas dari identitas $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})$.]

102. Carilah suatu himpunan vektor-vektor resiprok terhadap himpunan vektor

$$2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}, \quad \mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}, \quad -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

Jawab. $\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{k}, \quad -\frac{8}{3}\mathbf{i} + \mathbf{j} - \frac{7}{3}\mathbf{k}, \quad -\frac{7}{3}\mathbf{i} + \mathbf{j} - \frac{5}{3}\mathbf{k}$

103. Jika $\mathbf{a}' = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}$, $\mathbf{b}' = \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}$ dan $\mathbf{c}' = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}$, buktikan bahwa

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{b}' \times \mathbf{c}'}{\mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}' \times \mathbf{c}'}, \quad \mathbf{b} = \frac{\mathbf{c}' \times \mathbf{a}'}{\mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}' \times \mathbf{c}'}, \quad \mathbf{c} = \frac{\mathbf{a}' \times \mathbf{b}'}{\mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}' \times \mathbf{c}'}$$

104. Jika $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ dan $\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}'$ adalah sedemikian rupa sehingga

$$\mathbf{a}' \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b}' \cdot \mathbf{b} = \mathbf{c}' \cdot \mathbf{c} = 1$$

$$\mathbf{a}' \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}' \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b}' \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b}' \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c}' \cdot \mathbf{a} = \mathbf{c}' \cdot \mathbf{b} = 0$$

buktikan bahwa dari sini diperoleh

$$\mathbf{a}' = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}, \quad \mathbf{b}' = \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}, \quad \mathbf{c}' = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}$$

105. Buktikan bahwa himpunan vektor-vektor tangan-kanan yang dirinya sendiri juga vektor-vektor resiprok adalah vektor-vektor satuan $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

106. Buktikan bahwa terdapat satu dan hanya satu himpunan vektor-vektor resiprok terhadap suatu himpunan vektor-vektor tak-koplanar $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ yang diketahui.